ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1992

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Le but de ce problème est d'étudier les sommes de séries trigonométriques de la forme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive, décroissante et de limite nulle. La première partie est consacrée à des propriétés générales ; la seconde à l'étude de la convergence uniforme de la série sur l'intervalle $[\,0\,,\pi\,]$; la troisième à l'étude de la convergence de l'intégrale $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$; enfin, dans la quatrième, on examine un exemple particulier.

I

Pour tout entier $n > 0$ on définit des fonctions E_n, A_n, f_n sur $[\,0\,,\pi\,]$ par :

$$E_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})\, E_k(x)$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \quad .$$

1. a) Vérifier que l'on a :

$$2 \sin \frac{x}{2}\, E_n(x) = \cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x$$

b) Montrer que :

$$f_n(x) = A_n(x) + b_{n+1}\, E_n(x)$$

c) Etablir les inégalités :

$$\sin \frac{x}{2}\, |\, A_n(x) \,| \leqslant b_1 - b_{n+1}$$

$$\sin \frac{x}{2}\, |\, A_p(x) - A_n(x) \,| \leqslant b_{n+1} - b_{p+1}$$

$$\sin \frac{x}{2}\, |\, f_p(x) - f_n(x) \,| \leqslant 2\, b_{n+1}$$

lorsque $n < p$.

2. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur l'intervalle $[\,0\,,\pi\,]$, et que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[\,\alpha\,,\pi\,]$ où $0 < \alpha < \pi$. Que peut-on dire de la fonction f, limite simple de la suite (f_n) ?

3. a) Etablir que, pour tout $t \in \left[\,0\,,\frac{\pi}{2}\,\right]$, on a :

$$\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t \quad .$$

b) Montrer que, pour tout entier $m > 0$, la fonction $x \mapsto \sin mx\, f(x)$ est continue sur $[\,0\,,\pi\,]$, et calculer son intégrale sur cet intervalle.

II

4. On suppose que la suite $(n\, b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0, et on pose $\varepsilon_n = \sup_{k \geqslant n} (k\, b_k)$. Pour tout $x \in\,]\,0\,,\pi\,]$, on note p la partie entière de $\frac{\pi}{x}$, de sorte que l'on a :

$$p \leqslant \frac{\pi}{x} < p+1 \quad .$$

a) Vérifier les inégalités suivantes :

$$\left|\, \sum_{k=n}^{n+p-1} b_k \sin kx \,\right| \leqslant \pi\, \varepsilon_n$$

$$\left|\, \sum_{k=n+p}^{\infty} b_k \sin kx \,\right| \leqslant 2\, \varepsilon_n \quad .$$

b) Déduire de ce qui précède que la suite (f_n) converge uniformément sur $[\,0\,,\pi\,]$.

5. Montrer que, réciproquement, si la suite (f_n) converge uniformément sur $[\,0\,,\pi\,]$, la suite $(n\, b_n)$ tend vers 0. [On pourra établir qu'il existe une constante C telle que, pour tout n,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin \frac{k\pi}{4n} \geqslant C\, n\, b_{2n} \,] .$$

III

On se propose ici d'établir l'équivalence des trois conditions suivantes :

(i) l'intégrale $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$ est convergente

(ii) l'intégrale $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$ est absolument convergente

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < +\infty$.

On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

6. a) Vérifier que l'on a :

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x)|\,dx \leq \pi\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) s_n + \frac{2\pi}{n} b_{n+1} \quad .$$

[On pourra écrire $f(x) = f_n(x) + f(x) - f_n(x)$ et utiliser 1.c)].

b) Montrer que (iii) implique (ii).

7. Déterminer la limite de $\frac{s_n}{n}$.

8. On veut prouver que (i) implique (iii). On pose :

$$F(x) = \int_x^{\pi} f(t)\,dt \qquad \forall x \in]0, \pi]$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k} \qquad \lambda = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{b_k}{k} \quad .$$

a) Vérifier que :

$$\sigma_n = \lambda + F(x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_0^x \sin kt\,dt - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos kx \qquad \forall x \in]0, \pi] \ .$$

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} b_k \int_0^{\frac{1}{n}} \sin kt\,dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos\frac{k}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

[On pourra écrire $\sin\frac{1}{2n} \cos\frac{k}{n}$ comme demi-différence de deux sinus.]

d) Conclure.

IV

Cette partie est consacrée à l'étude du comportement de $f(x)$ lorsque $x \to 0+$, dans le cas où $b_n = \frac{\ell n\, n}{n}$.

9. On note ψ une fonction continue, positive, décroissante sur un intervalle $]0, a]$, et telle que l'intégrale $\int_0^a \psi(x)\,dx$ soit convergente. Vérifier que :

$$\int_0^a \psi(x)\,dx = \lim_{x\to 0+} \sum_{1\le n\le \frac{a}{x}} x\,\psi(nx)\,.$$

10. Soit φ une fonction réelle continue sur $]0, +\infty[$ possédant les propriétés suivantes :

(i) la fonction $x \mapsto \varphi(x) \sin x$ est positive et décroissante sur un intervalle $]0, a]$, et l'intégrale $\int_0^a \varphi(x) \sin x\,dx$ est convergente.

(ii) φ est positive et décroissante sur un intervalle $[b, +\infty[$, et tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

a) On fixe $\varepsilon > 0$; déterminer un nombre $A > 0$ tel que l'on ait :

$$\left| \sum_{n \ge \frac{A}{x}} x\,\varphi(nx) \sin nx \right| \le \varepsilon \qquad \forall x \in]0, \pi]$$

[on établira d'abord la convergence de cette série].

b) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(x) \sin x\,dx$ est convergente et égale à

$$\lim_{x \to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} x\,\varphi(nx) \sin nx\ .$$

11. On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ell n\, n}{n} \sin nx$.

a) L'intégrale $\int_0^\pi |f(x)|\,dx$ est-elle convergente ?

b) Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 0+$, et trouver une constante c telle que $f(x) - c\,\ell n\, x$ admette une limite finie en $0+$.

[On pourra écrire $\frac{\ell n\, n}{n} = x \frac{\ell n\,(nx)}{nx} - x \frac{\ell n\, x}{nx}$ et vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ est la série de Fourier de la fonction g impaire, périodique de période 2π, définie par :

$$g(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \forall x \in]0, \pi[\,, \qquad g(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}\ ].$$

c) L'intégrale $\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx$ est-elle convergente ?

♦ ♦
♦